

第4章 偏微分法

(キーワード)

偏微分、全微分、幾何学的意味、*grad*

4.1 偏微分係数

いままで、一つの独立変数 x の関数 $f(x)$ を考えてきた。これは、 x の値に対し、関数を定義する手続きにより値 $f(x)$ を対応させるものである。たとえば、 $f(x) = x^2$ の場合、実数 x に対し、 x を 2 乗した値を対応させる。もし、独立変数が 2 種類あって、おのおのを x 、 y と書くなら、この変数の組に対し、ある決まった値を対応させる手続きが与えられるなら、この手続きを変数 x 、 y の関数と言い、

$$z = f(x, y) \quad (4.1)$$

と書く。 x 、 y およびこれらから決定される z で指定される 3 次元空間内の点 (x, y, z) の集合は 3 次元空間内に曲面を作る。例えば、

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

$$z = g(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 1$$

では、最初関数では、点 (x, y, z) の集合は z 軸上 $z = 1$ に頂点を持つ回転放物面を形成する。次の関数では同じく z 軸上 $z = 1$ に頂点を持つ釣鐘型（ガウス型という）の曲面を与える。また、3 番目の関数は放物面であるが、回転対象ではなく、 $z = \text{const}$ の平面で切った切り口が楕円であり、その長軸が x 軸から y 軸方向へ 45° の角度になっている。独立変数の数は 2 つに限ったものではなく、関数関係が与えられるのであればいくらかでも増やすことができるが、その場合は我々に身近な曲面を表さない。以下では、2 変数関数に限って議論する。

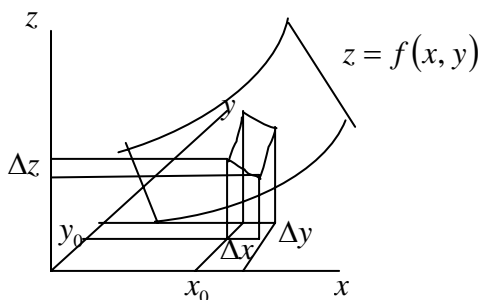


図4.1 2変数関数の変化率

1 変数関数の微分係数（導関数）は元の関数で与えられるグラフ（平面に書かれた曲線）の接線の傾きを与える。同様のことは 2 変数関数でも考えられる。今の場合、グラフに相当するものは曲面である。まず、変数 y をある値 y_0 に固定し、 x を x_0 から Δx だけ変化させる（図 4.1 参照）。このとき、関数の値の変化 Δz は

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

であり、平均の変化率は

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \quad (4.2)$$

である。ここで、 $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を取ったとき、上式の値が有限な一定値に収束するなら、この極限値を関数 $z = f(x, y)$ の変数 x についての**偏微分係数**といい、記号

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x} \quad (4.3)$$

で表す。要するに、二つの変数のうち、一つを定数とみなす。ここでは、 y の値を何かの値に固定するので、この関数は x の関数といえ、それに対して x で微分するのである。同様に、 x の値を x_0 に固定し、 y の値を y_0 から Δy だけ変化させたときの平均変化率は

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \quad (4.4)$$

であり、 $\Delta y \rightarrow 0$ の極限において式(4.4)が有限な一定の値に近づいたら

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (4.5)$$

により、関数 $z = f(x, y)$ の y についての偏微分係数が与えられる。
 x と y についての偏微分係数をそれぞれ記号

$$f_x \quad \text{および} \quad f_y$$

で表すことがある。偏微分した結果は x と y の関数である。

具体的に偏微分係数を求めるには、注目している変数以外の変数は定数と考えて通常の微分操作を行う。前述の関数について偏微分係数を求めてみる。

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 : \quad f_x = 2x \quad \text{および} \quad f_y = 2y$$

$$z = g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} : \quad f_x = -2xe^{-(x^2+y^2)} \quad \text{および} \quad f_y = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

$$z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 1 : \quad f_x = 2x + y \quad \text{および} \quad f_y = 2y + x$$

I 変数の場合では、高階微分係数が定義されていた。同様に、偏微分係数についても高階の偏微分係数が定義できる。例えば、関数 z を x について偏微分したあと、その結果について再度 x で偏微分するか、あるいは今度は y で偏微分することができる。これらは記号でそれぞれ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \text{および} \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad (4.6)$$

として表す。ここで、 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ は $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)$ 、つまり先に x で偏微分し、その結果を y で偏微分する、という意味である。同様にさらに高階な微分係数も同じ形式で表される。例えば、

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + 1 : \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (2x) = 2 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (2x) = 0 \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2y) = 0$$

$$z = g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} : \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ 2xe^{-(x^2+y^2)} \right\} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ -2ye^{-(x^2+y^2)} \right\} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2 e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ 2xe^{-(x^2+y^2)} \right\} = 4xy e^{-(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -2ye^{-(x^2+y^2)} \right\} = 4xy e^{-(x^2+y^2)}$$

この例題でも明らかなように、高階偏微分では変数 x および y による偏微分の順序が異なっても偏微分係数の表現は変わらない。つまり、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

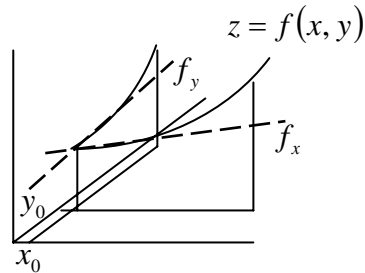


図4.2 曲面と座標平面との交線の傾

これは次のようにして理解される。例えば、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y} \quad \text{であるが、}$$

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$f_x(x, y + \Delta y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x}$$

であることを使って、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} - \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_y(x + \Delta x, y) - f_y(x, y)}{\Delta x} \\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで、第一式の2つの $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ の項で現れる Δx について、これらは本来は異なる値を取りな

がらゼロに近づくのであるが、ここではこれらの Δx を等しいものとして、同じ $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ の中に

まとめた。微分可能であれば Δx をゼロに近づける時の近づけ方に微分係数は依存しないので2つの Δx を同じものとして扱える。前ページの第一式

$$\frac{f_x(x, y + \Delta y) - f_x(x, y)}{\Delta y}$$

は関数 $f_x(x, y)$ の y 方向への平均的な変化率である。つまり、 $\Delta y \rightarrow 0$ としたとき曲面 $z = f(x, y)$ の x 方向への傾きを与える $f_x(x, y)$ の y 方向への変化率である。同様に、 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ はこの曲面の y 方向への傾きの x 方向への変化率である。この両者が等しいことを言っているのである。

4.2 偏微分係数の幾何学的意味

ここで、偏微分係数の意味を考えてみる。

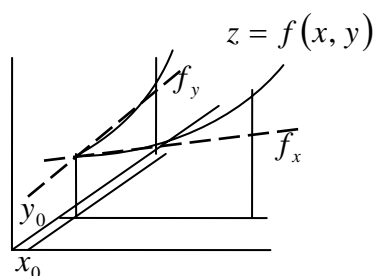


図4.2 曲面と座標平面との交線の傾き

図 4.2 に示したように y を固定して関数 $z = f(x, y)$ の x への依存性を調べる。関数 $z = f(x, y)$ で与えられる曲面と、 $y = y_0$ で与えられる平面との交線は曲線（グラフ）を与える。 f_x はこの曲線に $x = x_0$ で引いた接線の傾きを与える。同様に f_y は $x = x_0$ で与えられる y 軸に平行な平面と曲面との交線で描かれる曲線の $y = y_0$ における傾きを与える。言い換えれば、偏微分係数は曲面 $z = f(x, y)$ の傾きを与え、 f_x は x 軸方向への曲面の傾きであり、 f_y は y 軸方向への傾きである。それでは、任意の方向への曲面の傾きはどう現せるだろうか。話を進める前に、1 変数関数の微分 dy と同様に、2 変数の場合における微分 dz を考える。 dz を次の式で定義する。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (4.8)$$

このとき、 dz を関数 z の全微分と呼ぶ。

位置 (x, y) における関数 z の値は $f(x, y)$ である。位置 $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ における z の値は $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$ であるので、位置座標が (x, y) から $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ に変化したとき、関

数の変化量 Δz は

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad (4.9)$$

である。独立変数 x と y の微分 dx と dy はそれぞれ Δx と Δy であるが、 Δx と Δy が有限であるとき dz と Δz は等しくない。 Δz はあくまでも関数値の変化分であるが、 dz はこの曲面に接する平面上での z 方向の変化分を与える。 Δx および Δy が非常に小さいときに dz と Δz は近似的に等しく、 Δx と Δy がともにゼロに近づくと $\Delta z \rightarrow dz$ となる。

位置 (x, y) においてこの曲面に接する平面を図 4.3 に基づいて考える。この接平面の x 軸から角度 α の方向への傾きはどのように表されるだろうか。位置 (x, y) から角度 α の方向である $(x + dx, y + dy)$ へ進むと、接平面上の対応する z 座標は dz だけ変化する。

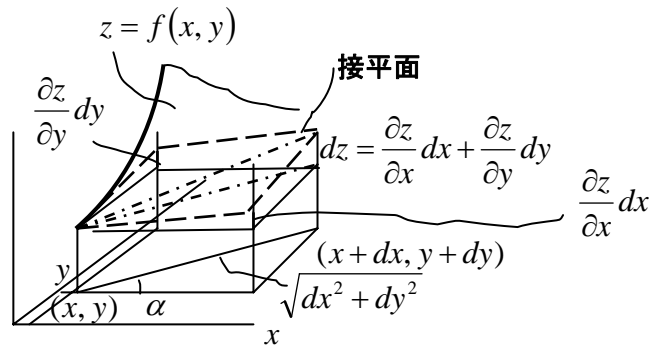


図4.3 曲面の任意方向への傾き

したがって、この接平面の角度 α の方向への傾きは

$$z \text{ の変化量} / \text{移動距離} = \frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

であるので全微分の表式(4.8)を使って、この傾きは

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha \quad (4.10)$$

で与えられる。これを曲面の位置 (x, y) における角度 α の方向への傾きとみなす。

例えば、 $z = e^{-(x^2 + y^2)}$ の場合、位置 (x, y) において、位置ベクトル $\mathbf{r} = (x, y)$ の方向への曲面の傾きを求めてみる。 \mathbf{r} が x 軸となす角を φ とすると、

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{および} \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{なので}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi &= -2xe^{-(x^2+y^2)} \cos \varphi - 2ye^{-(x^2+y^2)} \sin \varphi \\ &= -2e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = -2e^{-(x^2+y^2)} \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = -2re^{-r^2}, \end{aligned}$$

ここに $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であり、傾きを求めている位置までの原点からの距離である。この結果によれば、曲面の \mathbf{r} 方向への傾きは原点からの距離 r だけに依存し、原点からみた観測点の方位角 φ には依存しない。原点 $r=0$ では傾きがゼロであり、 $r=\infty$ でも傾きがゼロである。その間の r に対し、傾きは恒に負である。この曲面は釣鐘型（頂点の (x, y) 座標が原点の）なので、この結果は直感的に納得できる。

次に、変数 x と y が他の変数 t の関数になっているとき、変数 t の微分 dt に対する関数 z の微分 dz はどのように書けるであろうか。 t が変化すると点 (x, y) は $x-y$ 平面上の曲線を描く。 t が Δt だけ変化すると曲線上の点が移動するので、それに伴い z も変化する。この変化分を計算するのである。 t が変化すると x と y は $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$ および $\Delta y = y(t + \Delta t) - y(t)$ だけ変化する。ところで、変化分と微分は Δt が小さいとき、近似的に等しく、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限では一致するので

$$\Delta x \cong dx = \frac{dx}{dt} dt \quad \Delta y \cong dy = \frac{dy}{dt} dt$$

と表せる。したがって、 z の微分 dz は

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt \quad (4.11)$$

となる。したがって、 z の t についての微分係数は

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (4.12)$$

で与えられる。

これは多変数関数における合成関数の微分係数の一例である。

4.3 grad グラディエント

偏微分係数にはさらに重要な幾何学的な意味がある。関数 $z = f(x, y)$ の位置 (x, y) における任意方向 (x 軸から角度 α の方向) への変化率(4.10)はベクトルのスカラー積として次のように表される。

$$\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha = (\mathbf{grad} z) \cdot \hat{\mathbf{r}} \quad (4.13)$$

ここで、

$$\mathbf{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \quad (4.14)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = (\cos \alpha, \sin \alpha) = \mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha \quad (4.15)$$

である。ベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ は位置 (x, y) において x 軸から角度 α の方向を向いた単位ベクトルであり、 \mathbf{i} および \mathbf{j} は x および y 軸方向への単位ベクトルである。このベクトルは方向を示すベクトルであり、ベクトル解析で多用される。(4.13)のスカラー積が最も大きくなる方向 α はどのような方向であろうか。ここで、曲面の傾きを与える式 (1.13) を最大にする角度 α を求めてみよう。スカラー積(4.13)を最大にするために変化させてみるのは $\hat{\mathbf{r}}$ の方向である。今、ベクトル $\mathbf{grad} z$ とベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ の間の角度を θ とすると、スカラー積(4.13)は

$$|\mathbf{grad} z| |\hat{\mathbf{r}}| \cos \theta = |\mathbf{grad} z| \cos \theta \quad (4.16)$$

と表される。ここで $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$ であることを用いた。

これは $\theta = 0$ で最大となる。したがって、スカラー積(4.13)を最も大きくするベクトル $\hat{\mathbf{r}}$ の方向は $\mathbf{grad} z$ と同じ方向である。つまり、ベクトル $\mathbf{grad} z$ が関数 z の最大傾斜方向 (増大する方向) を与え、 $|\mathbf{grad} z|$ が最大傾斜率 (傾き、あるいは増大率) を与える。したがって、最大に減少する方向は $-\mathbf{grad} z$ である。このことから、 $\mathbf{grad} z$ を勾配ベクトルと呼ぶことがある。また、

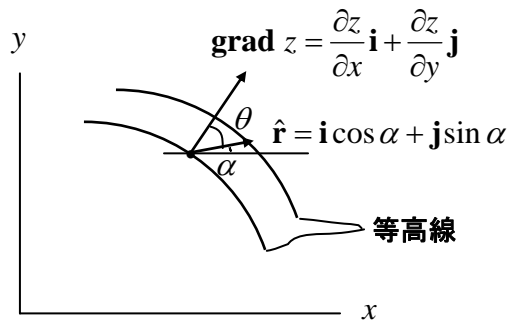


図4.4 θ 方向への傾き

別の記号

$$\nabla z \text{ (ナブラ } z \text{ と呼ぶ) あるいは } \frac{\partial z}{\partial \mathbf{r}}$$

なども良く用いられる。

ここで、式(4.13)で与えられる量を更に吟味しよう。この式はそもそも曲面 $z = f(x, y)$ の $\hat{\mathbf{r}}$ 方向への変化率である。したがって、この変化率がゼロである方向へは、 z は変化しない。

その方向に $\hat{\mathbf{r}}$ を取ったなら、 $\hat{\mathbf{r}}$ と $\mathbf{grad} z$ のスカラー積がゼロということで、 $\hat{\mathbf{r}}$ と $\mathbf{grad} z$ は垂直になっている。 $z = f(x, y)$ が変化しないように (x, y) の組み合わせを取っていくと $x-y$ 平面上に等高線を描くことになる。この等高線の接線方向に $\hat{\mathbf{r}}$ を取ると、 $\mathbf{grad} z$ は等高線と垂直であることが結論される。このことは第3章の式(3.54)で与えられる等高線の接線ベクトルと $\mathbf{grad} z$ のスカラー積を作ってみれば確認できる。接線ベクトルは次のようにして求めることができる。まず、

$$z = f(x, y) = C \quad (4.17)$$

を満たす x, y の組み合わせが等高線を与えることに注意する。曲面の高さは $z = C$ である。このことは、等高線上の y は x の関数として与えられることになる。 $y = y(x)$ をこの等高線とすると、第3章の式(3.54)によれば、接線ベクトルは次式で与えられる。

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \left(\mathbf{i} + \frac{dy}{dx} \mathbf{j} \right) \quad (4.18)$$

この様に与えられるベクトル \mathbf{t} と $\mathbf{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j}$ とのスカラー積を作ると

$$(\mathbf{grad} z) \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right)$$

と書けるが、式(4.17)の両辺を x で微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

であるため

$$(\mathbf{grad} z) \cdot \mathbf{t} = 0$$

となる。つまり、この2つのベクトルはあらゆる場所で直交していることが確認された。以下にいくつかの関数に適用する。

回転放物面 $z = g(x, y) = x^2 + y^2$: 位置(1,1)では

$$[\mathbf{grad} z]_{x=1, y=1} = \left[\frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} \right]_{x=1, y=1} = [2xi + 2yj]_{x=1, y=1} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$$

である。傾きの最大値はベクトル $\mathbf{grad} z$ の絶対値なので、 $|\mathbf{grad} z| = 2\sqrt{2}$ である。また、ベクトル $\mathbf{grad} z$ は成分として $(2, 2)$ を持つので位置 $(1, 1)$ における $\mathbf{grad} z$ の方向は x 軸から 45° の方向である。また、この位置 $(1, 1)$ に於ける方向 $\hat{\mathbf{r}} = (1, 0)$ 、つまり x 軸に沿う方向への傾きは

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{grad} z = \mathbf{i} \cdot (2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) = 2$$

として求まる。つまり、 $\mathbf{grad} z$ のほうが x 軸の方向より大きい傾きを与えることが確認される。

問：同様に y 軸方向への傾きを求めなさい。

$$\text{ガウス曲面} : z = g(x, y) = e^{-(x^2+y^2)} : \mathbf{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} = -2xe^{-(x^2+y^2)} \mathbf{i} - 2ye^{-(x^2+y^2)} \mathbf{j}$$

であり、ベクトル $\mathbf{grad} z$ の方向が x 軸から角度 β であるとする、

$$\tan \beta = \frac{(\mathbf{grad} z)_y}{(\mathbf{grad} z)_x} = \frac{-2ye^{-(x^2+y^2)}}{-2xe^{-(x^2+y^2)}} = \frac{y}{x}$$

である。 $\mathbf{grad} z$ の x 成分と y 成分の符号に注意すると、最大傾斜 (増大) 方向は観測点 (x, y) から原点を見る方向であり、その大きさ、つまり傾斜の大きさは

$$|\mathbf{grad} z| = \sqrt{\left(-2xe^{-(x^2+y^2)}\right)^2 + \left(-2ye^{-(x^2+y^2)}\right)^2} = 2e^{-(x^2+y^2)} \sqrt{x^2 + y^2} = 2re^{-r^2}$$

である。ここで、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ で原点から観測点までの距離である。ガウス型の釣鐘様の曲面では最大傾斜方向は原点にある頂上方向であり、大きさは原点からの距離だけに依存する。図 4.5 にこの曲面を示す。

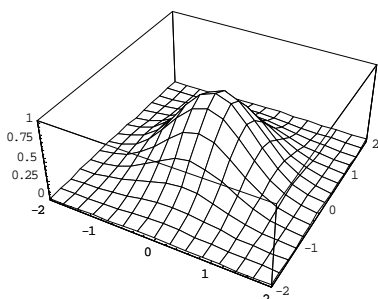


図4.5 ガウス型曲面

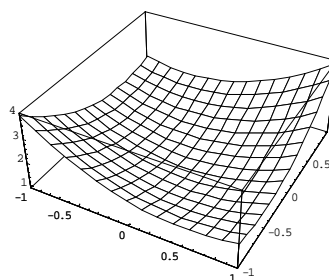


図4.6 放物面

放物面 $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 1$: $\mathbf{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{j} = (2x + y) \mathbf{i} + (2y + x) \mathbf{j}$

位置 (x, y) における最大傾斜 (増大する) 方向は

$$\tan \beta = \frac{(2y + x)}{(2x + y)} = \frac{2 \frac{y}{x} + 1}{2 + \frac{y}{x}} = \frac{2 \tan \gamma + 1}{2 + \tan \gamma}$$

である。ここで、 γ は観測地点 (x, y) まで引いた位置ベクトルの x 軸からの角度である。ここでの最大傾斜率は

$$|\mathbf{grad} z| = \sqrt{(2x + y)^2 + (2y + x)^2} = \sqrt{5x^2 + 8xy + 5y^2}$$

である。この曲面と $x-z$ 平面あるいは $y-z$ 平面による切り口は

$$z = x^2 + 1 \text{ もしくは } z = y^2 + 1$$

の放物面であり、 $z = \text{const}$ の面による切り口は z 軸を中心とする楕円である。この楕円の長軸は x 軸から -45° の方向にある。 x 軸上の位置 $(x, 0)$ における最大傾斜 (増大) 方向は、上式で $\gamma = 0$ として、 $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ の方向である。この曲面の例を図 4.6 に示した。

いままでは 2 変数で与えられる関数の \mathbf{grad} を考えてきたが、独立変数が 3 変数であっても \mathbf{grad} を与えることができる。独立変数 x, y, z の関数として $f(x, y, z)$ が与えられたとき、

$$\mathbf{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

で 3 次元の $\mathbf{grad} f$ を定義する。3 次元の $\mathbf{grad} f$ の意味を考える。まず、これはベクトルであり、スカラー関数 f に基づいて形成される 3 次元ベクトルである。ベクトルの方向は関数 f が最大に増大する方向を向いている。ベクトルの大きさは f の最大増加率を与え

る。すなわち 2 次元での議論をそのまま延長して考えることが出来る。2 次元の場合、 $\mathbf{grad} f$ は $f(x, y) = \text{Const}$ で与えられる等高線に垂直な方向であったが、3 次元の場合では $f(x, y, z) = \text{Const}$ で与えられる曲面に垂直な方向（この曲面の法線方向）を向く（第 6 章参照）。

次の関数は原点に置かれた質点が位置 (x, y, z) に作り出す万有引力ポテンシャル、あるいは、原点に置かれた点電荷が作り出す静電ポテンシャルの形をしている。

$$f = \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

ここで k は質点による万有引力ポテンシャルか、点電荷による静電ポテンシャルかにより適当な値を取るものとする。この関数 $f(x, y, z)$ に対して、 $\mathbf{grad} f$ を作ると、

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= -\frac{kx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} - \frac{ky}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} - \frac{kz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{k} \\ &= -\frac{kx}{r^3} \mathbf{i} - \frac{ky}{r^3} \mathbf{j} - \frac{kz}{r^3} \mathbf{k} = -\frac{k}{r^2} \frac{x}{r} \mathbf{i} - \frac{k}{r^2} \frac{y}{r} \mathbf{j} - \frac{k}{r^2} \frac{z}{r} \mathbf{k} = -\frac{k}{r^2} \left(\frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k} \right) \\ &= -\frac{k}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = -\mathbf{F} \end{aligned}$$

ここで $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ であり、 $\hat{\mathbf{r}} = \frac{x}{r} \mathbf{i} + \frac{y}{r} \mathbf{j} + \frac{z}{r} \mathbf{k}$ は原点にある質点もしくは点電荷から観測点 (x, y, z) を向く単位ベクトルである。 \mathbf{F} は位置 (x, y, z) における万有引力もしくは電場である。これらが、ポテンシャル関数 $f(x, y, z)$ の \mathbf{grad} で与えられ、これらの力は $f(x, y, z) = \text{Const}$ で与えられる曲面に垂直である。この曲面を等ポテンシャル面と言う。この例では、等ポテンシャル面は原点を中心とする球面であり、力は原点と観測点を結ぶ方向を向く。

4.4 熱力学への応用

物理学では熱力学の分野で偏微分係数が多用される。1 モルの分子ガスがあるとする。このとき、ガスの圧力 P 、ガスが占める体積 V 、およびガスの温度 T には

$$PV = RT$$

の関係が成り立つ。ここで R は気体定数である。この関係が意味することは P, T, V の 3 変数で 2 つを与えればもう 1 つは必然的に決まってしまうことである。したがって、 P と T を独立変数としたとき、 V は P と T の関数として、

$$V = \frac{RT}{P}$$

で与えられる。これを言葉で言うならば；ガスの温度を T 、圧力を P としてあるなら、ガスの体積は V でなければならない。

同様に、体積を V 、温度を T にすればガスの圧力は

$$P = \frac{RT}{V}$$

になっている。また、ガスの圧力を P にし、体積を V にしたなら、このガスの温度は

$$T = \frac{PV}{R}$$

で与えられる。これらを用い、熱力学の次の関係を導ける。

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

V は T と P の関数とみなせるが、 $\frac{\partial V}{\partial T}$ は P を固定して T で微分したものであるので

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} \quad \text{である。同様に、} \quad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R} \quad \text{および} \quad \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2} \quad \text{が得られる。}$$

したがって

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{PV} = -1$$

となる。ところで、この式の左辺を約分して1にしないように注意されたい。 $\frac{\partial V}{\partial T}$ では P を

一定にして T を変化させ、 $\frac{\partial T}{\partial P}$ では T の変化は V を一定にして行われているので T の変化

の仕方が違うため、約分することはできない。